

Řešení zápočtového testu

1 A

1.1 Zákon hromadění směrodatných odchylek

Rovinný trojúhelník je zadán dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným. Hodnoty zadaných veličin a jejich směrodatné odchylky jsou uvedeny v následující tabulce.

| veličina | hodnota | směrodatná odchylka |
|---------------|-------------|---------------------|
| strana a | 175.25 m | 0.12 m |
| strana b | 193.70 m | 0.15 m |
| úhel γ | 43.5792 gon | 0.0080 gon |

Určete směrodatnou odchylku plochy trojúhelníka.

Řešení

1. Obsah trojúhelníka: $S(a, b, \gamma) = \frac{1}{2} a b \sin(\gamma)$

2. Volba označení a fyzikálních jednotek:

- $\tilde{a} := 175.25$ m,
- $\tilde{b} := 193.70$ m,
- $\widehat{\gamma} := \frac{\pi}{200} 43.5792$ gon = 0.68454 rad,
- $\sigma_a := 0.12$ m,
- $\sigma_b := 0.15$ m,
- $\sigma_\gamma := \frac{\pi}{200} 0.0080$ gon = $1.256637 \cdot 10^{-4}$ rad,
- směrodatná odchylka plochy trojúhelníka: $\sigma_S = ?$

3. Zákon hromadění směrodatných odchylek:

$$\begin{aligned}\sigma_S &= \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial a}(\tilde{a}, \tilde{b}, \widehat{\gamma}) \cdot \sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}(\tilde{a}, \tilde{b}, \widehat{\gamma}) \cdot \sigma_b\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \gamma}(\tilde{a}, \tilde{b}, \widehat{\gamma}) \cdot \sigma_\gamma\right)^2} = \\&= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\tilde{b} \sin(\widehat{\gamma}) \cdot \sigma_a\right)^2 + \left(\tilde{a} \sin(\widehat{\gamma}) \cdot \sigma_b\right)^2 + \left(\tilde{a} \tilde{b} \cos(\widehat{\gamma}) \cdot \sigma_\gamma\right)^2} = \\&= \frac{1}{2} \sqrt{15001.3 \cdot 0.0144 + 12279.6 \cdot 0.0225 + 691597281 \cdot 1.5791 \cdot 10^{-8}} \text{ m}^2 .\end{aligned}$$

4. Odpověď:

Směrodatná odchylka plochy trojúhelníka $\sigma_S = 11.22 \text{ m}^2$.

1.2 Vyrovnání

Mezi třemi body, P_1 , P_2 , P_3 , ležícími v jedné přímce, byly změřeny délky $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{2,3}$, každá několikrát. Výsledky měření jsou uvedeny v následující tabulce. V posledním sloupci tabulky jsou směrodatné odchylky měřených délek.

| i | j | $s_{i,j}$ | $\sigma_{i,j}$ |
|-----|-----|-----------|----------------|
| 1 | 2 | 17.349 m | 0.004 m |
| | | 17.341 m | |
| | | 17.352 m | |
| 2 | 3 | 11.962 m | 0.003 m |
| | | 11.957 m | |
| | | 11.959 m | |
| | | 11.963 m | |
| 1 | 3 | 29.309 m | 0.006 m |
| | | 29.302 m | |

- Vyrovnajte všechny zadané měřené délky metodou nejmenších čtverců tak, abyste určili délky dvou úseků mezi body P_1 , P_3 . Vypočtete vyrovnané délky úseků $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$.
- Jak byste odhadl/a přesnost výsledných vyrovnaných hodnot?

2 B

2.1 Zákon hromadění směrodatných odchylek

Rovinný trojúhelník je zadán dvěma úhly a stranou mezi jejich vrcholy. Hodnoty zadaných veličin a jejich směrodatné odchylky jsou uvedeny v následující tabulce.

| veličina | hodnota | směrodatná odchylka |
|---------------|-------------|---------------------|
| úhel α | 50.5792 gon | 0.0010 gon |
| úhel β | 49.4318 gon | 0.0010 gon |
| strana c | 150.45 m | 0.03 m |

Určete směrodatnou odchylku strany proti menšímu úhlu.

Řešení

1. Vyjádření strany b trojúhelníka pomocí sinové věty: $b(\alpha, \beta, c) = \frac{c \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$

2. Volba označení a fyzikálních jednotek:

- $\widehat{\alpha} := \frac{\pi}{200} 50.5792 \text{ gon} = 0.794496 \text{ rad}$,
- $\widehat{\beta} := \frac{\pi}{200} 49.4318 \text{ gon} = 0.776473 \text{ rad}$,
- $\tilde{c} := 150.45 \text{ m}$,
- $\sigma_\alpha := \frac{\pi}{200} 0.0010 \text{ gon} = 1.570796 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$,
- $\sigma_\beta := \frac{\pi}{200} 0.0010 \text{ gon} = 1.570796 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$,
- $\sigma_c := 0.03 \text{ m}$,
- směrodatná odchylka strany b trojúhelníka: $\sigma_b = ?$.

3. Zákon hromadění směrodatných odchylek:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \tilde{c}) \cdot \sigma_\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial \beta}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \tilde{c}) \cdot \sigma_\beta\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial c}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \tilde{c}) \cdot \sigma_c\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{c \sin(\beta) \cos(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cdot \sigma_\alpha\right)^2 + \left(\frac{c \sin(\alpha)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cdot \sigma_\beta\right)^2 + \left(\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sigma_c\right)^2} = \\ &= \sqrt{0.000331862 \cdot 2.46740 \cdot 10^{-10} + 11523.5 \cdot 2.46740 \cdot 10^{-10} + 0.491075 \cdot 0.0009} \text{ m} \end{aligned}$$

4. Odpověď:

Směrodatná odchylka strany b trojúhelníka $\sigma_b = 0.021 \text{ m}$.

2.2 Vyrovnání

Výška barevně odlišeného segmentu válcového komína byla určena trigonometricky pomocí zenitových úhlů změřených ze dvou stanovisek. Vodorovné vzdálenosti stanovisek od paty komína a měřené hodnoty zenitových úhlů spolu s jejich směrodatnými odchylkami jsou uvedeny v následující tabulce.

| i | j | s_i | $z_{i,j}$ | $\sigma_{z,i,j}$ |
|-----|-----|---------|-------------|------------------|
| 1 | 1 | 23.28 m | 90.2323 gon | 0.0012 gon |
| 1 | 2 | 23.28 m | 59.4917 gon | 0.0016 gon |
| 2 | 1 | 30.08 m | 93.4629 gon | 0.0012 gon |
| 2 | 2 | 30.08 m | 67.6813 gon | 0.0014 gon |

Vzdálenosti stanovisek od paty komína považujte za bezchybné.

- Měřené zenitové úhly vyrovnejte metodou nejmenších čtverců a vypočtete výšku segmentu komína.
- Jak byste odhadl/a přesnost vyrovnané výšky segmentu?

Řešení

1. Vyjádření měřených veličin pomocí neznámých (zprostředkující rovnice):

$$\begin{aligned} z_{1,1} &= \arctan\left(\frac{s_1}{x_1}\right) =: a_1(x_1, x_2, x_3) \\ z_{1,2} &= \arctan\left(\frac{s_1}{x_1 + x_3}\right) =: a_2(x_1, x_2, x_3) \\ z_{2,1} &= \arctan\left(\frac{s_2}{x_2}\right) =: a_3(x_1, x_2, x_3) \\ z_{2,2} &= \arctan\left(\frac{s_2}{x_2 + x_3}\right) =: a_4(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

2. Volba označení a fyzikálních jednotek:

- $\widehat{z}_{1,1} := \frac{\pi}{200} 90.2323 \text{ gon} = 1.417366 \text{ rad}$,
- $\widehat{z}_{1,2} := \frac{\pi}{200} 59.4917 \text{ gon} = 0.9344934 \text{ rad}$,
- $\widehat{z}_{2,1} := \frac{\pi}{200} 93.4629 \text{ gon} = 1.468112 \text{ rad}$,
- $\widehat{z}_{2,2} := \frac{\pi}{200} 67.6813 \text{ gon} = 1.063135 \text{ rad}$,
- $\tilde{\mathbf{t}} := [\widehat{z}_{1,1}, \widehat{z}_{1,2}, \widehat{z}_{2,1}, \widehat{z}_{2,2}]^T$,
- $\mathbf{x} := [x_1, x_2, x_3]^T$,
- $\mathbf{x}^\circ = [3.6002, 3.0997, 13.6165]^T$,
- $\mathcal{A} := [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$,
- $\mathbf{l} := \tilde{\mathbf{t}} - \mathcal{A}(\mathbf{x}^\circ) = 10^{-4} \cdot [0, 4.7501, 0, -4.3424]^T$,
- $\mathbf{A} := - \begin{bmatrix} 0.041952 & , & 0 & , & 0 \\ 0.041952 & , & 0 & , & 0.027768 \\ 0 & , & 0.032895 & , & 0 \\ 0 & , & 0.032895 & , & 0.025400 \end{bmatrix}$,
- $\sigma_{z,1,1} := \frac{\pi}{200} 0.0012 \text{ gon} = 1.8850 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$,
- $\sigma_{z,1,2} := \frac{\pi}{200} 0.0016 \text{ gon} = 2.5133 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$,
- $\sigma_{z,2,1} := \frac{\pi}{200} 0.0012 \text{ gon} = 1.8850 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$,
- $\sigma_{z,2,2} := \frac{\pi}{200} 0.0014 \text{ gon} = 2.1991 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$,

- $P := \text{diag}([2.8145 \cdot 10^9, 1.5831 \cdot 10^9, 2.8145 \cdot 10^9, 2.0678 \cdot 10^9])$,
- hledané převýšení: $x_3 = ?$

3. Rovnice oprav:

$$\tilde{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\varepsilon} \doteq \mathcal{A}(\mathbf{x}^\circ) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ), \quad \mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon} \dots \text{neznámé},$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \doteq \boldsymbol{\varepsilon} \doteq \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{l}, \quad \mathbf{r} := \mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ \dots \text{redukované neznámé},$$

4. podmínka metody nejmenších čtverců:

$$(\mathbf{v}(\hat{\mathbf{r}}))^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(\hat{\mathbf{r}}) = \min_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} (\mathbf{v}(\mathbf{r}))^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

5. řešení soustavy normálních rovnic:

$$\hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{l},$$

6. přechod k původním (neredukovaným) neznámým:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{x}^\circ.$$

7. Odpověď:

Hledané převýšení $x_3 = 13.6164$ m. Jeho směrodatná odchylka je odmocnina třetího diagonálního prvku matice $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A})^{-1}$, tj. 0.8 mm.

11. ledna 2018

Lubomír Soukup

soukup@utia.cas.cz